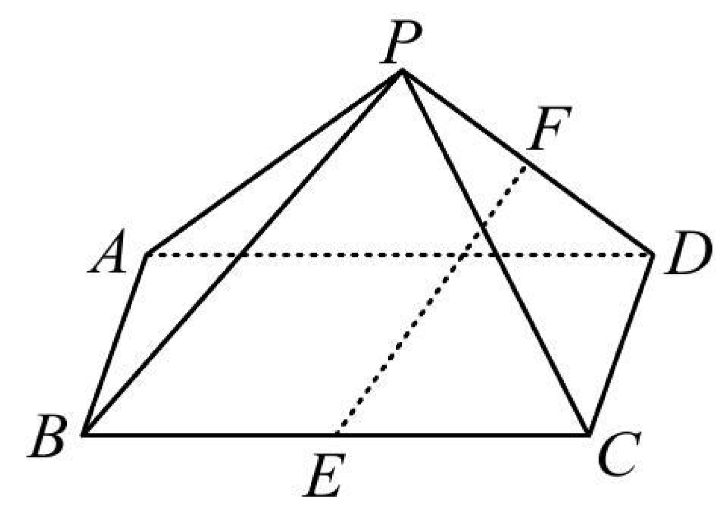
第 2 节 综合小题（★★★★）

强化训练

类型 I：空间角的计算

1.（2023·忻州模拟·★★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是矩形，$PA=\sqrt{2}AB$，E，F 分别是棱 BC，PD 的中点，则异面直线 EF 与 AB 所成角的余弦值是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

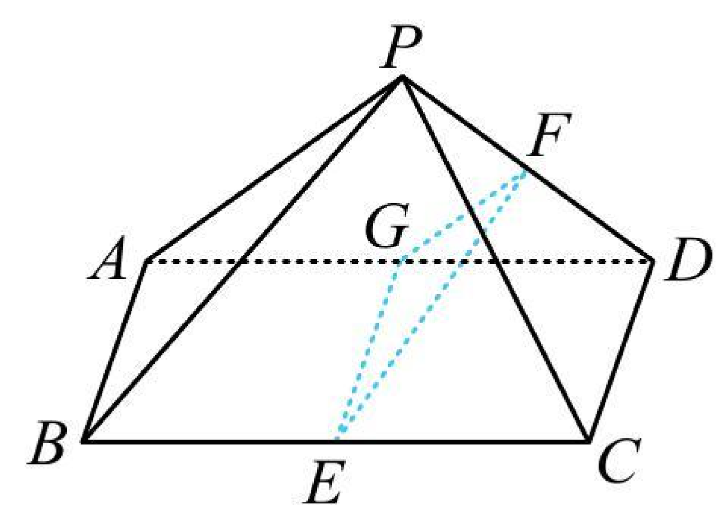


答案：B

解析：观察发现 $ABCD$ 是矩形，平移 AB 比较方便，如图，取 AD 中点 G，连接 GE，GF，则 $GE // AB$，所以 $GE\perp AD$，结合平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$ 可得 $GE\perp$ 平面 PAD，故 $GE\perp GF$，

设 $AB=a$，则 $GE=a$，$PA=\sqrt{2}a$，$GF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$EF=\sqrt{GE^2+GF^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，

所以 $\cos\angle GEF=\dfrac{GE}{EF}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故异面直线 EF 与 AB 所成角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



2.（2023·全国乙卷·★★★）已知 ΔABC 为等腰直角三角形，AB 为斜边，ΔABD 为等边三角形，若二面角 $C-AB-D$ 为 150°，则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{5}$　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　（D）$\dfrac{2}{5}$

答案：C

解析：两个等腰三角形有公共的底边，这种情况常取底边中点构造线面垂直，

如图，取 AB 中点 E，连接 DE，CE，由题意，$DA=DB$，

$AC=BC$，所以 $AB\perp DE$，$AB\perp CE$，

故 $\angle DEC$ 即为二面角 $C-AB-D$ 的平面角，

且 $AB\perp$ 平面 CDE，所以 $\angle DEC=150^\circ$，

作 $DO\perp CE$ 的延长线于 O，则 $DO\subset$ 平面 CDE，

所以 $DO \perp AB$，故 $DO \perp$ 平面 ABC，

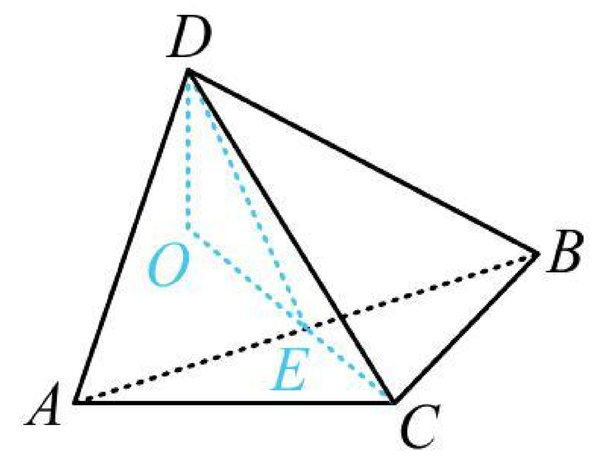
所以 $\angle DCO$ 即为直线 CD 与平面 ABC 所成的角，

不妨设 $AB=2$，则 $CE=1$，$DE=\sqrt{3}$，

因为 $\angle DEC=150^{\circ}$，所以 $\angle DEO=30^{\circ}$，

故 $OE=DE\cdot\cos\angle DEO=\frac{3}{2}$，$OD=DE\cdot\sin\angle DEO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

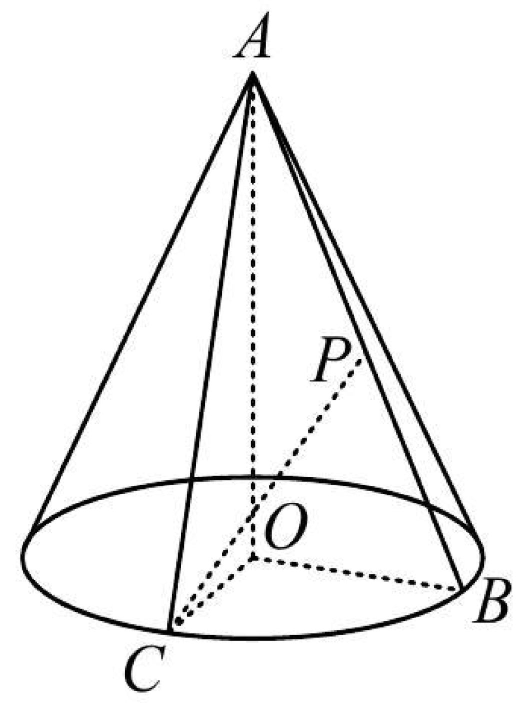
$OC=OE+CE=\frac{5}{2}$，所以 $\tan\angle DCO=\frac{OD}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.



【反思】两个等腰三角形有公共底边这类图形，常取底边中点，构造两个线线垂直，进而得出线面垂直.

3.（2022•浙江期中•★★★）如图，圆锥 AO 中，B，C 是圆 O 上的不同两点，若 $\angle OAB=30^{\circ}$，且二面角 $B-AO-C$ 为 60°，动点 P 在线段 AB 上，则 CP 与平面 AOB 所成角的正切值的最大值为（　　）

（A）2　（B）$\sqrt{3}$　（C）$\sqrt{2}$　（D）1



答案：A

解析：$AO\perp$面$BOC \Rightarrow \begin{cases} AO\perp OB \\ AO\perp OC \end{cases} \Rightarrow \angle BOC$是二面角 $B-AO-C$ 的平面角，由题意，$\angle BOC=60^{\circ}$，

要找 CP 与面 AOB 所成的角，先过 C 作面 AOB 的垂线，注意到 $AO\perp$面 BOC，所以只需作 OB 的垂线，

如图 1，取 OB 中点 G，连接 CG，PG，因为 $OB=OC$，$\angle BOC=60^{\circ}$，所以 ΔOBC 是正三角形，故 $CG\perp OB$，

结合 $CG\perp AO$ 可得 $CG\perp$面 AOB，所以 $\angle CPG$ 即为直线 CP 与面 AOB 所成的角，$\tan\angle CPG=\frac{CG}{PG}$ ①，

不妨设 $OB=OC=2$，则 $CG=\sqrt{3}$，代入①得：$\tan\angle CPG=\frac{\sqrt{3}}{PG}$ ②，PG 最小时，$\tan\angle CPG$ 最大，

因为 $\angle OAB=30^{\circ}$，所以 $OA=2\sqrt{3}$，如图 2，当 $PG\perp AB$ 时，PG 最小，所以 $PG_{\min}=BG\cdot\sin\angle PBG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

代入②得 $(\tan\angle CPG)_{\max}=2$.

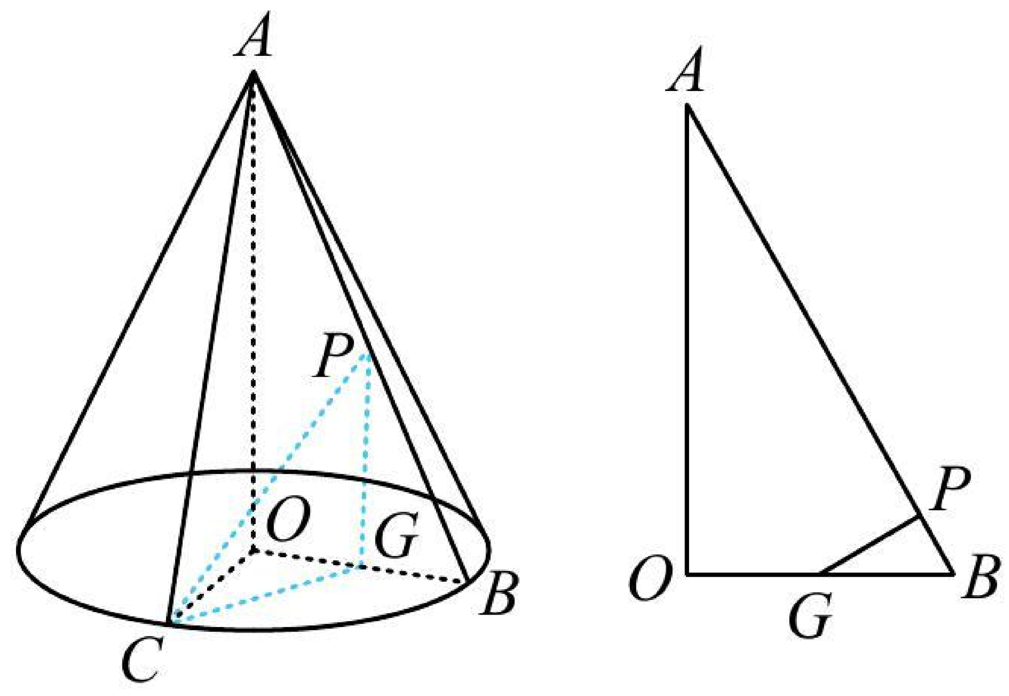


图1　　图2

类型Ⅱ：压轴综合多选题

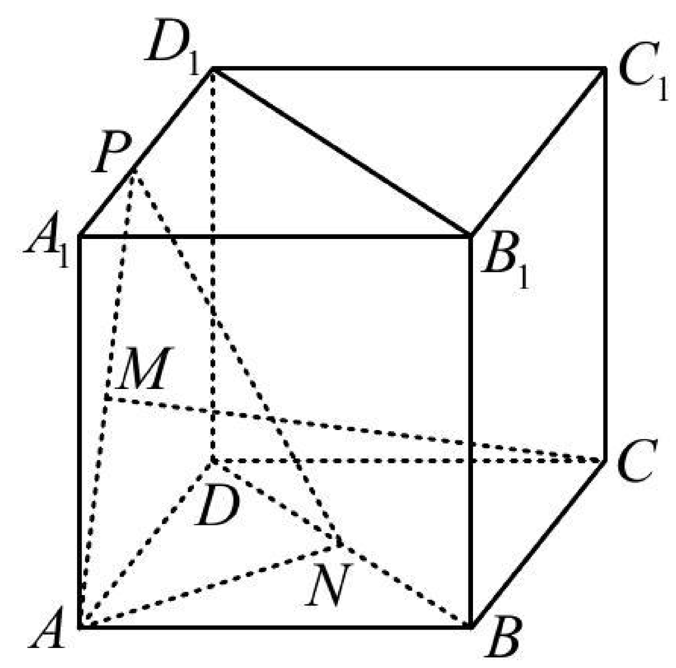
4.（2022•湖南模拟•★★★）（多选）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，N 为底面 $ABCD$ 的中心，P 为线段 A_1D_1 上的动点（不含端点），M 为线段 AP 的中点，则（　　）

（A）CM 与 PN 是异面直线

（B）$CM>PN$

（C）平面 $PAN\perp$ 平面 BDD_1B_1

（D）过 A，P，C 三点的正方体的截面一定是等腰梯形



答案：BCD

解析：A 项，N 为底面 $ABCD$ 的中心，所以 A，N，C 三点共线，延长 AN 到 C，如图，

则 PA 和 AC 是相交直线，CM 和 PN 都在平面 PAC 内，它们不异面，故 A 项错误；

B 项，几何法计算 CM 和 PN 较麻烦，可建系用空间两点距离公式来算，

如图建系，不妨设正方体棱长为 2，则 $N(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$A(2,0,0)$，设 $P(a,0,2)(0<a<2)$，

则 $M(\frac{a+2}{2},0,1)$，$CM^2=\frac{(a+2)^2}{4}+5$，$PN^2=(a-1)^2+5$，

所以 $PN^2-CM^2=(a-1)^2+5-\frac{(a+2)^2}{4}-5=\frac{3a^2-12a}{4}=\frac{3a(a-4)}{4}<0$，从而 $CM>PN$，故 B 项正确；

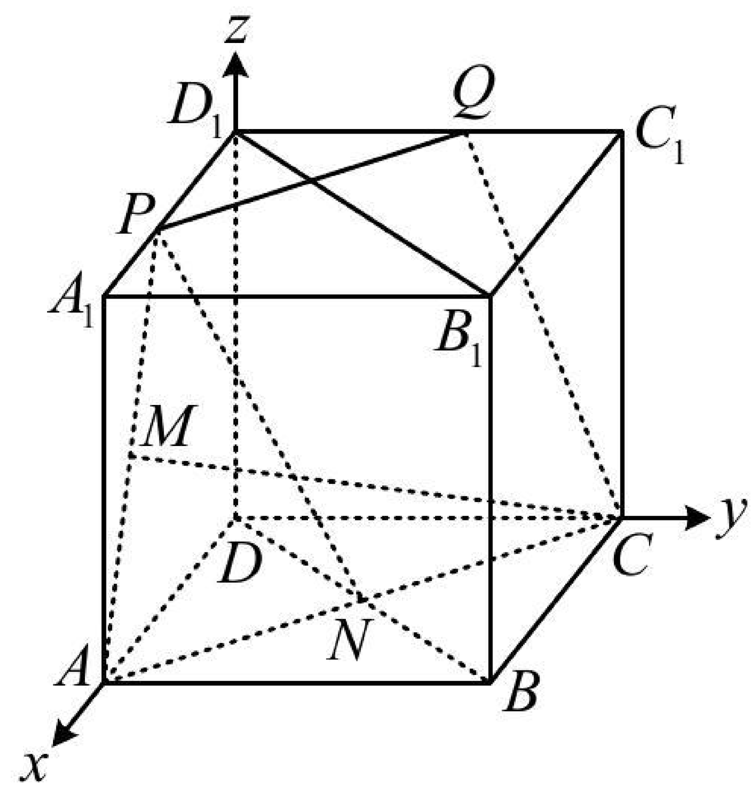
C 项，$BB_1\perp$ 平面 $ABCD\Rightarrow AN\perp BB_1$，又 $AN\perp BD$，所以 $AN\perp$ 平面 BDD_1B_1，

从而平面 $PAN\perp$ 平面 BDD_1B_1，故 C 项正确；

D 项，截面不完整，需先补充，点 P 和直线 AC 分别在上、下两个平行的面上，故作平行线即可，

如图，过 P 作 $PQ// AC$ 交 C_1D_1 于 Q，连接 CQ，则 $ACQP$ 即为正方体过 P，A，C 三点的截面，

因为 P 不与 A_1 重合，所以 $PQ\neq AC$，由对称性可知 $PA=QC$，从而 $ACQP$ 为等腰梯形，故 D 项正确.



5．（2022·山东模拟·★★★）（多选）在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp BC$，P在底面ABC上的投影是AC中点D，$DP=DC=1$，则下列结论中正确的是（　　）

（A）$PA=PB=PC$

（B）$\angle PAB$的取值范围为$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

（C）若三棱锥$P-ABC$的四个顶点都在球O的表面上，则球O的表面积为2π

（D）若$AB=BC$，E是棱PC上的一个动点，则$DE+BE$的最小值是$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

答案：ABD

解析：A 项，如图 1，D为直角三角形ABC的斜边AC的中点，所以$DA=DC=DB=1$，

又$PD\perp$面ABC，所以$PD\perp AC$，$PD\perp BD$，故$PA=\sqrt{PD^2+AD^2}=\sqrt{2}$，

$PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=\sqrt{2}$，所以$PA=PB=PC$，故 A 项正确；

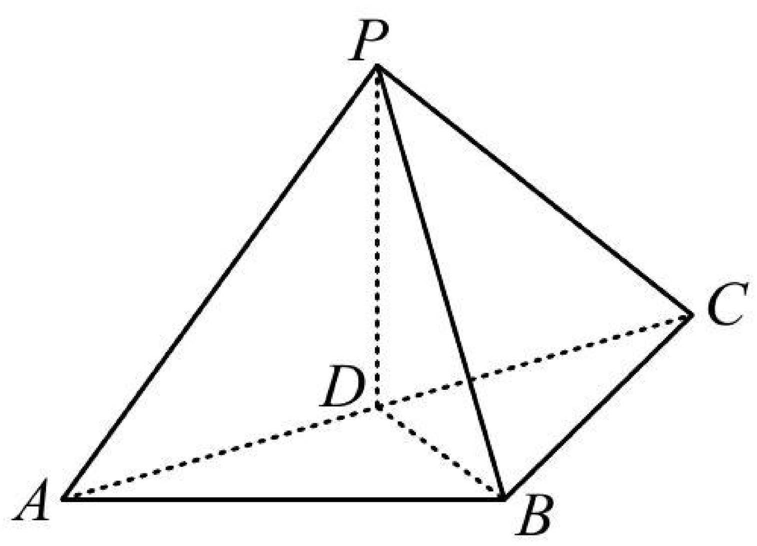


图1

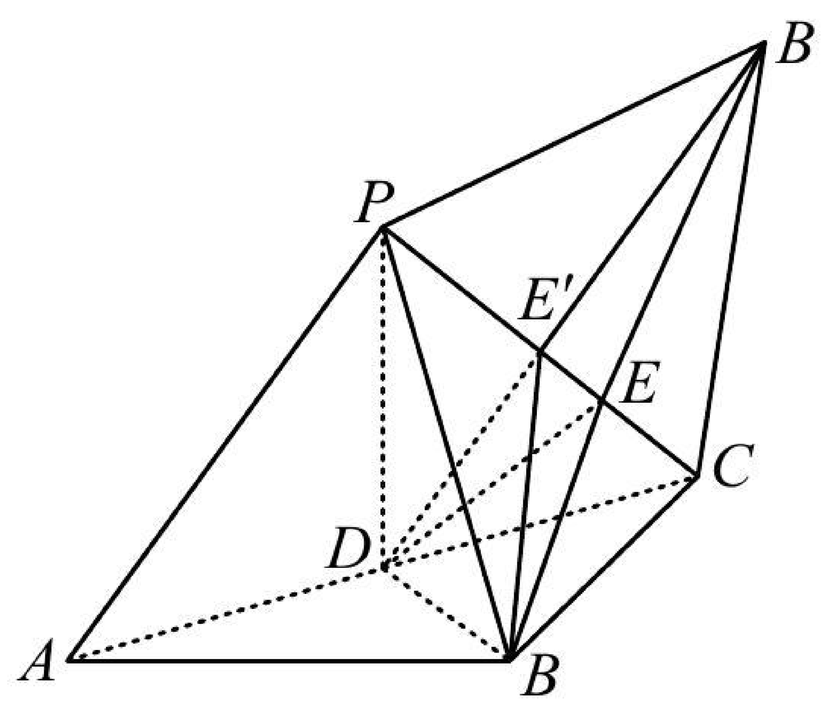


图2

B 项，图形中不确定的是ΔABC的直角边长，可把AB看成变量，表示$\cos\angle PAB$，进而分析$\angle PAB$的范围，注意到$AC=2$，所以$0<AB<2$，在ΔPAB中，由余弦定理，

$$\cos\angle PAB=\frac{PA^2+AB^2-PB^2}{2PA\cdot AB}=\frac{2+AB^2-2}{2\sqrt{2}AB}=\frac{AB}{2\sqrt{2}}\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$$，所以$\angle PAB\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，故 B 项正确；

C 项，$DP=DA=DB=DC=1\Rightarrow D$即为球心，且球的半径$R=1$，表面积$S=4\pi R^2=4\pi$，故 C 项错误；

D 项，涉及沿表面的距离最值问题，考虑将空间图形展开到平面上来分析，

若$AB=BC$，则ΔABC是等腰直角三角形，$AC=2\Rightarrow AB=BC=\sqrt{2}$，

所以ΔPBC是边长为$\sqrt{2}$的正三角形，将ΔPBC沿PC翻折到和ΔPCD在同一平面，如图 2，

当E位于PC中点E'处时，$DE+BE$取得最小值，且最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，故 D 项正确.

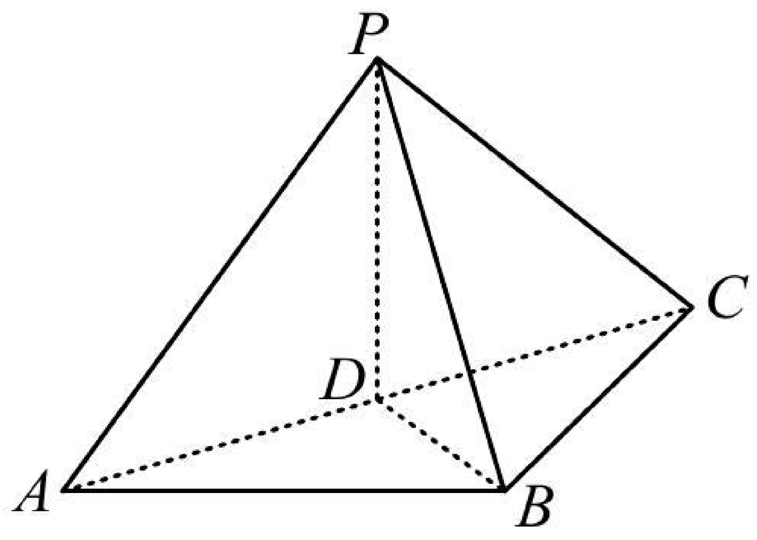


图1

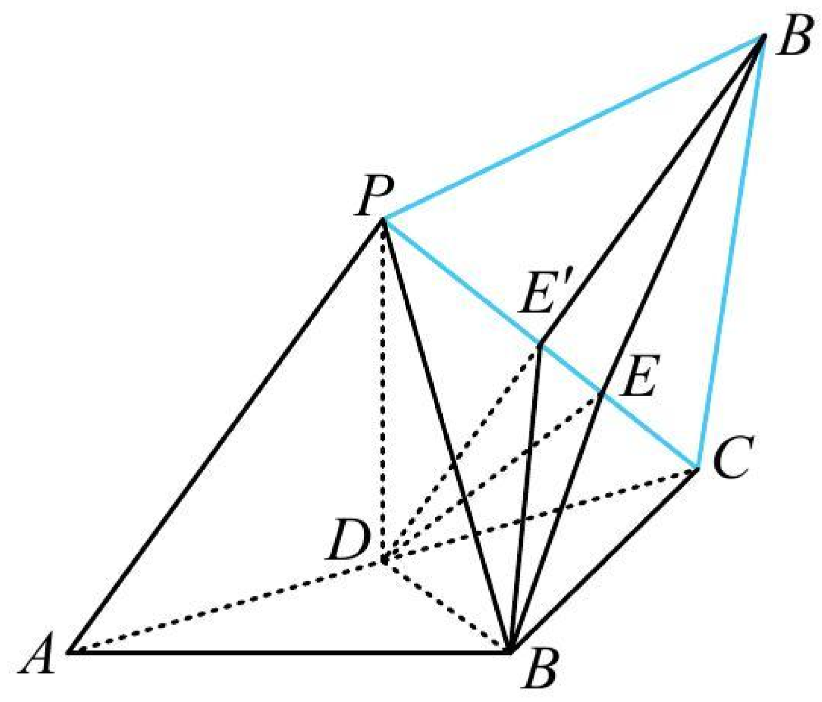


图2

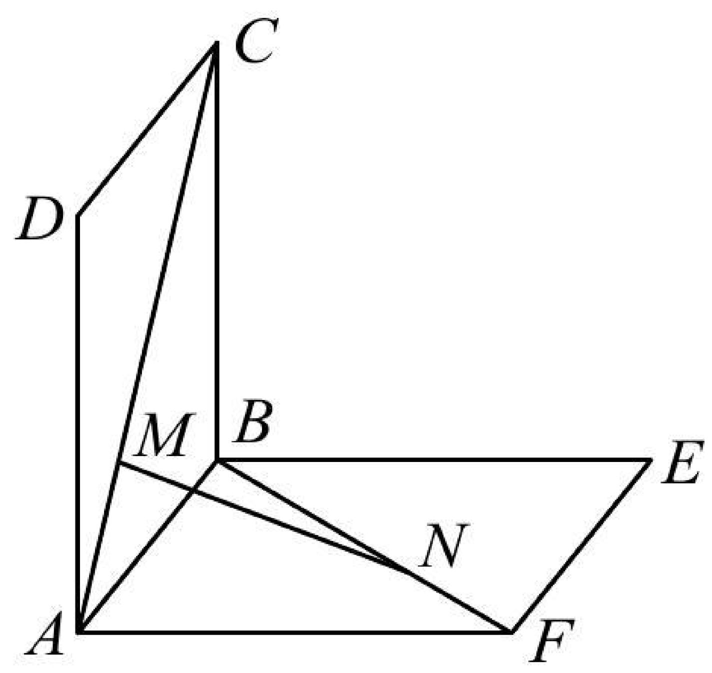
6.（2023 • 长沙雅礼中学模拟 • ★★★★）（多选）在如图所示的实验装置中，两个长方形框架 $ABCD$ 与 $ABEF$ 全等，且它们所在的平面互相垂直，$AB=1$，$BC=BE=2$，活动弹子 M，N 分别在长方形对角线 AC 和 BF 上移动，且 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{5})$，则下列说法正确的是（　　）

（A）$AB\perp MN$

（B）MN 的长的最小值为 $\sqrt{2}$

（C）当 MN 的长最小时，平面 MNA 与平面 MNB 所成夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$

（D）$V_{M-ANB}=\dfrac{a^2(2\sqrt{5}-2)}{15}$



答案：ABC

解析：从条件可分析出 BA，BE，BC 两两垂直，且看选项发现 A、B、C 都能用向量法判断，故建系，

如图建系，则 $A(1,0,0)$，$B(0,0,0)$，设 $\angle EBF=\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{EF}{BF}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\begin{cases}BN\cdot\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a\\ BN\cdot\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a\end{cases}$，故 $N(\dfrac{\sqrt{5}}{5}a,\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a,0)$，作 $MG\perp x$ 轴于 G，$MH\perp z$ 轴于 H，则 $\angle MCH=\theta$，

所以 $MH=CM\cdot\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$，$CH=CM\cdot\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$，$BH=2-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$，故 $M(\dfrac{\sqrt{5}}{5}a,0,2-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a)$，

A 项，$\overrightarrow{AB}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{MN}=(0,\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a,\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a-2)$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，从而 $AB\perp MN$，故 A 项正确；

B 项，$MN=|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\dfrac{4}{5}a^2+(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a-2)^2}=\sqrt{\dfrac{8}{5}a^2-\dfrac{8\sqrt{5}}{5}a+4}=\sqrt{\dfrac{8}{5}(a-\dfrac{\sqrt{5}}{2})^2+2}$，

所以当 $a=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时，MN 取得最小值 $\sqrt{2}$，故 B 项正确；

C 项，当 MN 最小时，$M(\dfrac{1}{2},0,1)$，$N(\dfrac{1}{2},1,0)$，所以 $\overrightarrow{MN}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{MA}=(\dfrac{1}{2},0,-1)$，$\overrightarrow{BN}=(\dfrac{1}{2},1,0)$，

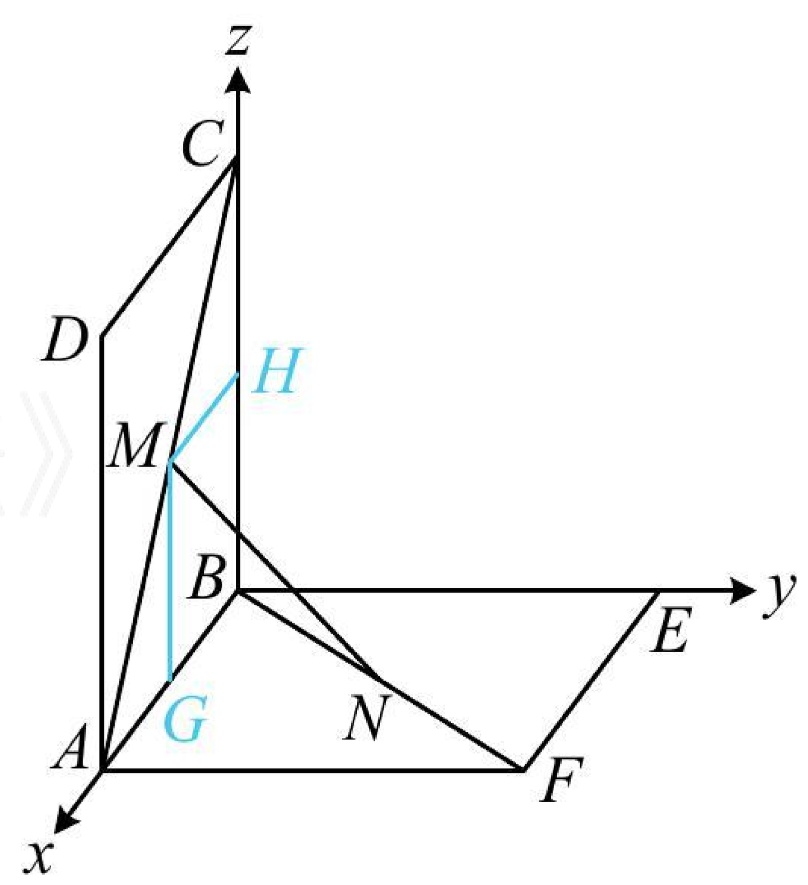
设平面 MNA，MNB 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MN}=y_1-z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{2}x_1-z_1=0\end{cases}$，令 $y_1=1$，则 $\begin{cases}x_1=2\\ z_1=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$ 是平面 MNA 的一个法向量，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=y_2-z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}x_2+y_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$，则 $\begin{cases}x_2=-2\\ z_2=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(-2,1,1)$ 是平面 MNB 的一个法向量，

$|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ 平面 MNA 与平面 MNB 的夹角余弦值为 $\dfrac{1}{3}$，故 C 项正确；

D 项，$V_{M-ANB}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ANB}\cdot MG=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a\times(2-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a)=\dfrac{\sqrt{5}a(2-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a)}{15}=\dfrac{2\sqrt{5}a-2a^2}{15}$，故 D 项错误.



7.（2023 •湖北统考 •★★★★）（多选）折纸是一种高雅的艺术活动，已知正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 2，现将 ΔACD 沿对角线 AC 旋转 180°，记旋转过程中点 D 的位置为点 P（不含起始位置和与 B 重合的情形），AC，AP，BC 的中点分别为 O，E，F，则（　　）

（A）$AC\perp BP$

（B）$PB+PD$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$

（C）旋转过程中，EF 与平面 BOP 所成角的正弦值的取值范围是 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$

（D）ΔACD 旋转形成的几何体的体积是 $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

答案：ACD

解析：ΔACD 旋转过程中形成的是两个共底面的半圆锥，如图 2，

A 项，BP 在半圆所在的平面上，$AC\perp$ 半圆所在平面，所以 $AC\perp BP$，故 A 项正确；

B 项，点 P 在半圆上，故先由勾股定理找到 PB，PD 的关系，再分析最值，

$PB\perp PD\Rightarrow PB^2+PD^2=BD^2=8$，所以 $(PB+PD)^2=PB^2+PD^2+2PB\cdot PD\le2(PB^2+PD^2)=16$，

故 $PB+PD\le 4$，当且仅当 $PB=PD=2$ 时取等号，所以 $PB+PD$ 的最大值为 4，故 B 项错误；

C 项，几何法分析此线面角较困难，考虑建系，用向量法处理，

如图 2 建系，则 $A(0,0,\sqrt{2})$，$B(0,-\sqrt{2},0)$，$C(0,0,-\sqrt{2})$，$F(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，

点 P 在半圆上运动，在 xOy 平面内，该半圆的方程为 $x^2+y^2=2(x>0)$，故可设 $P(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha,0)$，

其中 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $E(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha,\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha,\frac{\sqrt{2}}{2})$，故 $\overrightarrow{FE}=(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha,\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$，

由图可知 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 是平面 BOP 的一个法向量，设直线 EF 与平面 BOP 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{FE},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{FE}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{FE}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\cos^2\alpha+(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sin\alpha}}$，

因为 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $-1<\sin\alpha<1$，从而 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\theta<1$，故 C 项正确；

D 项，该旋转体的上下两部分可拼接成一个完整的圆锥，其底面半径和高都是 $\sqrt{2}$，

所以其体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$，故 D 项正确.

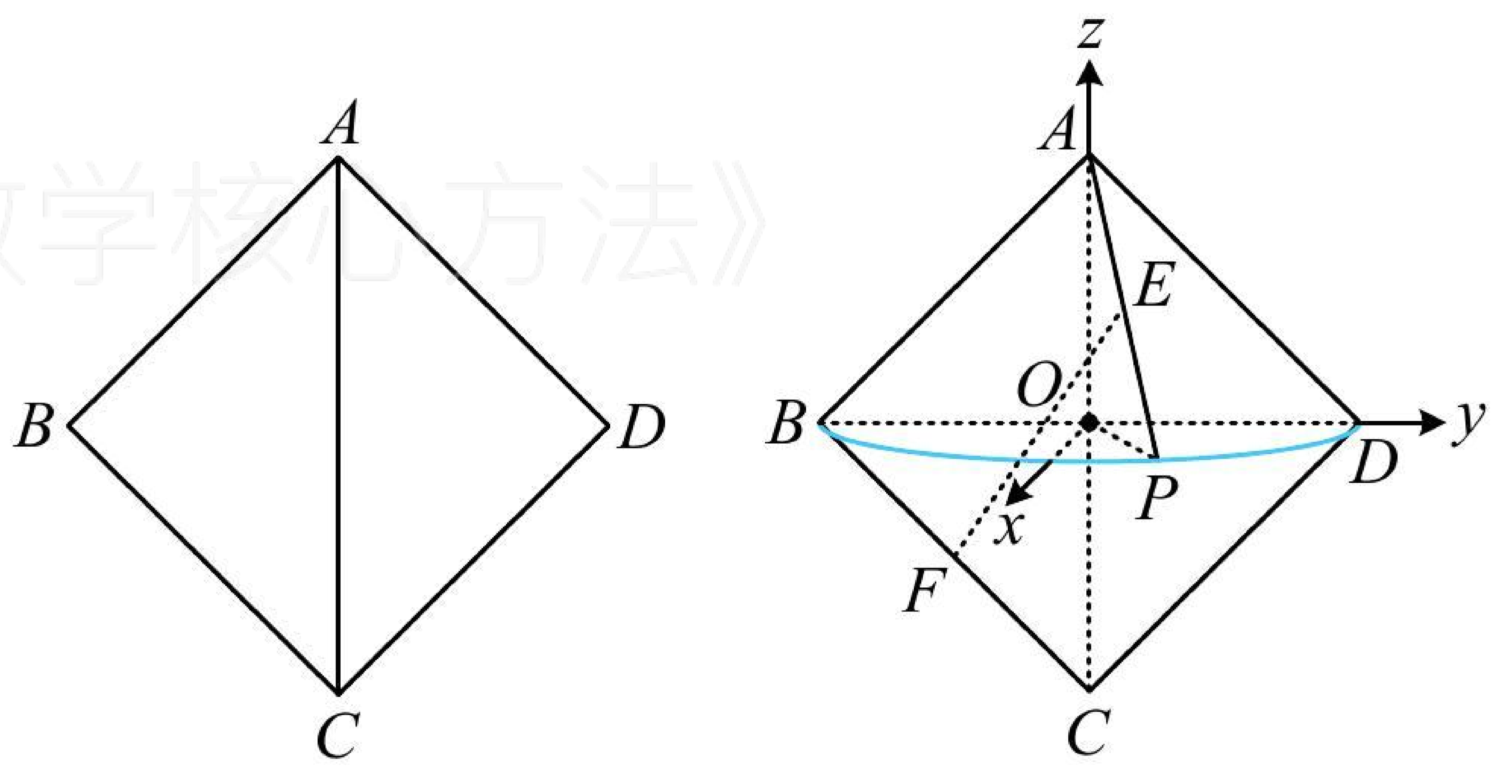


图1　　图2

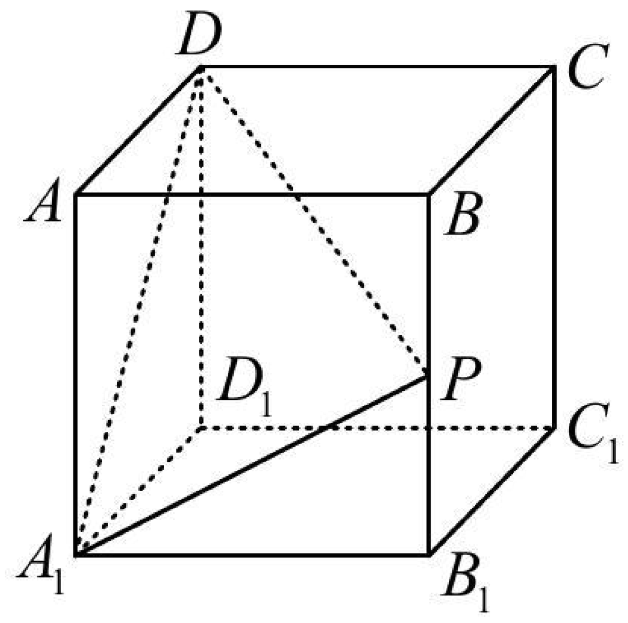
8.（2022•第二次 T8 联考•★★★★）（多选）如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 的中点，Q 为正方形 BB_1C_1C 内一动点（含边界），则下列说法中正确的是（）

（A）若 D_1Q // 平面 A_1PD，则动点 Q 的轨迹是一条线段

（B）存在点 Q，使得 $D_1Q\perp$ 平面 A_1PD

（C）当且仅当点 Q 落在棱 CC_1 上某点处时，三棱锥 $Q-A_1PD$ 的体积最大

（D）若 $D_1Q=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则点 Q 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$



答案：ACD

解析：A 项，可构造一个过 D_1 且与面 A_1PD 平行的平面，找到该面与正方形 BB_1C_1C 的交线即可，

如图 1，取 CC_1 的中点 G，连接 D_1G，则 D_1G // A_1P，取 B_1C_1 中点 H，连接 GH，D_1H，

则 GH// A_1D，所以平面 D_1GH // 平面 A_1DP，

从而当点 Q 在线段 GH 上时，都满足 D_1Q // 平面 A_1PD，故 A 项正确；

B 项，可逆向思考，如果 $D_1Q\perp$ 平面 A_1PD，那么 $\begin{cases}D_1Q\perp A_1P\\ D_1Q\perp A_1D\end{cases}$，不妨先考虑 $D_1Q\perp A_1P$，

A_1P 在面 ABB_1A_1 内，由三垂线定理知 $D_1Q\perp A_1P\Leftrightarrow A_1P\perp D_1Q$ 在面 ABB_1A_1 内的射影，

其中 D_1 在该面内的射影为 A_1，我们发现过 A_1 在面 ABB_1A_1 内与 A_1P 垂直的直线如图 2 中的 l，

正方形 BB_1C_1C 内的任意点在 ABB_1A_1 内的射影都不可能落在直线 l 上，所以 D_1Q 与 A_1P 不可能垂直，

从而不存在点 Q，使得 $D_1Q\perp$ 平面 A_1PD，故 B 项错误；

C 项，$S_{\Delta A_1DP}$ 不变，故当点 Q 到平面 A_1DP 距离最大时，三棱锥 $Q-A_1PD$ 的体积最大，由 A 项的分析过程可知只要点 Q 在平面 D_1GH 的下方且离该平面越远，Q 到平面 A_1DP 的距离就越大，所以当 Q 与 C_1 重合时，三棱锥 $Q-A_1PD$ 的高最大，故 C 项正确；

D 项，如图 2，连接 C_1Q，则 $D_1C_1\perp C_1Q$，所以 $C_1Q=\sqrt{D_1Q^2-D_1C_1^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而点 Q 的轨迹是正方形 BB_1C_1C 内的以 C_1 为圆心，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的一段圆弧，该圆弧为 $\dfrac{1}{4}$ 圆，其长度为 $\dfrac{1}{4}\times 2\pi\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$，故 D 项正确.

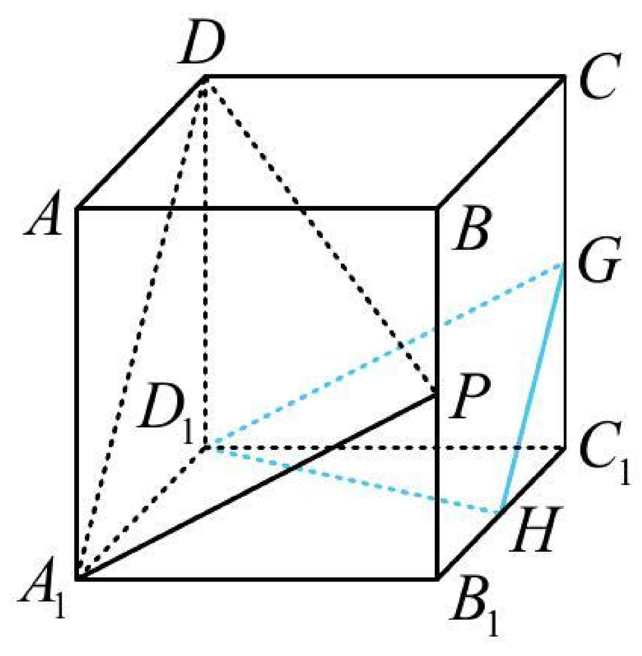


图1

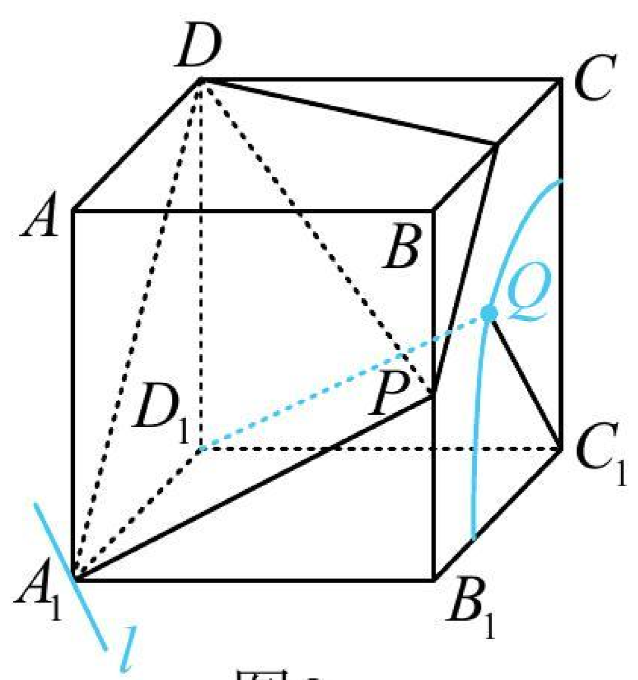


图2

9．（2021·新高考 I 卷·★★★★）（多选）在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则（　　）

（A）当 $\lambda=1$ 时，ΔAB_1P 的周长为定值

（B）当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

（C）当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$

（D）当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P

答案：BD

解析：当 λ，μ 发生变化时，由 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$ 可分析点 P 的运动轨迹，再来判断选项，

A 项，当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，所以点 P 在棱 CC_1 上运动，如图 1，

设 $CP=a$，则 $C_1P=1-a$，所以 $AP=\sqrt{AC^2+CP^2}=\sqrt{1+a^2}$，$B_1P=\sqrt{B_1C_1^2+C_1P^2}=\sqrt{1+(1-a)^2}$，

而 $AB_1=\sqrt{2}$，所以 ΔAB_1P 的周长为 $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(1-a)^2}+\sqrt{2}$，不是定值，故 A 项错误；

B 项，当 $\mu=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$，所以点 P 在棱 B_1C_1 上运动，如图 2，此时 ΔPBC 的面积为定值，点 A_1 到平面 PBC 的距离也为定值，所以三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值，故 B 项正确；

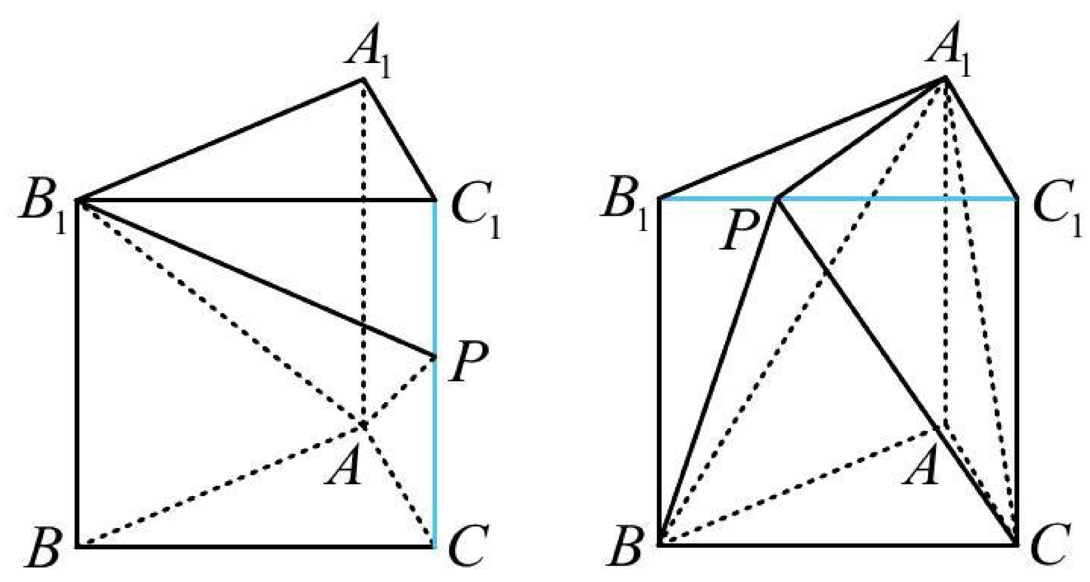


图1　　图2

C 项，当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，设 BC，B_1C_1 的中点分别为 M，N，

则点 P 在线段 MN 上运动，如图 3，再看怎样能使 $A_1P\perp BP$，可设 PM，在 ΔA_1BP 中用勾股定理求它，

设 $PM=b$，则 $NP=1-b$，$BP=\sqrt{BM^2+PM^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+b^2}$，

由题意，$A_1N\perp B_1C_1$，$A_1N\perp BB_1$，所以 $A_1N\perp$ 平面 BCC_1B_1，故 $A_1N\perp NP$，

所以 $A_1P=\sqrt{A_1N^2+NP^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}+(1-b)^2}$，又 $A_1B=\sqrt{2}$，而 $A_1P\perp BP$ 等价于 $A_1P^2+BP^2=A_1B^2$，

即 $\dfrac{3}{4}+(1-b)^2+\dfrac{1}{4}+b^2=2$，解得：$b=0$ 或 1，所以 P 与点 M 或点 N 重合，

从而使得 $A_1P\perp BP$ 的点 P 有 2 个，故 C 项错误；

D 项，当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$，设 BB_1，CC_1 的中点分别为 S，T，则点 P 在线段 ST 上运动，

如图 4，因为 $A_1B\perp AB_1$，所以点 P 在 ST 上运动时，要使 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P，只需 $A_1B\perp B_1P$，

前面已证 $A_1N\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 A_1B 在平面 BCC_1B_1 内的射影为 NB，由三垂线定理，

要使 $A_1B\perp B_1P$，只需 $NB\perp B_1P$，由图可知满足要求的点 P 只有一个（P 与 T 重合），故 D 项正确.

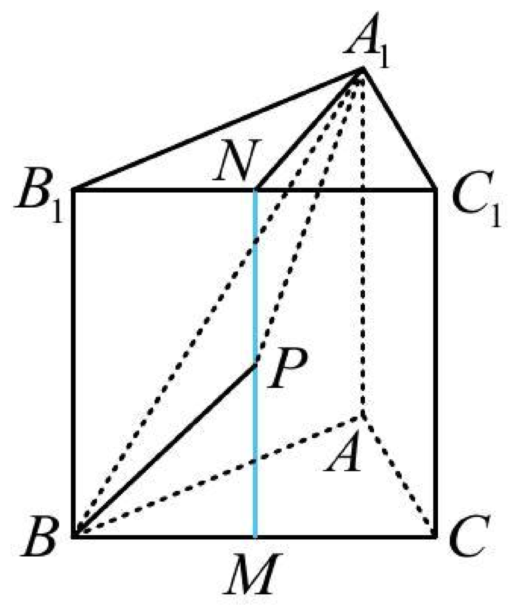


图3

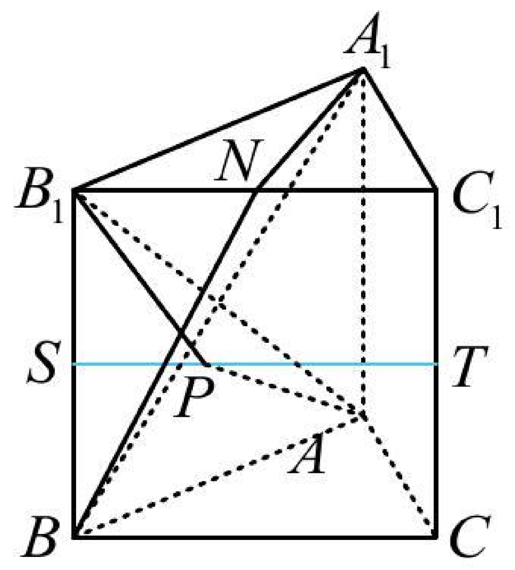


图4